EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

3 — 1 NOVEMBER 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES; RÔLE DES PROBLÈMES DANS CE DÉVELOPPEMENT I

par

Dr. Anna Zofia Krygowska

Kraków

De Redactie van Euclides is mevrouw Krygowska dankbaar, dat ze de tekst van het rapport door haar namens de CIEM op het Internationaal Mathematisch congres te Moskou in 1966 uitgebracht, voor publikatie in Euclides heeft willen afstaan. Haar voordracht behoorde met de inleidingen van Papy en Steiner tot de belangrijkste evenementen in de didactische sectie van het congres.

We wijzen erop dat de naam Nederland in de lijst van nationale rapporten ontbreekt. In rapport V van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde uitgegeven in 1962 heeft Van Hiele echter in het hoofdstuk *The relations between theory and problems in arithmetic and algebra* de thans in Moskou besproken materie reeds aangesneden. Ook België, dat ten opzichte van de modernisering van het wiskunde-onderwijs zoveel pioniersarbeid verricht, ontbreekt in de rij van landen die een rapport hebben ingediend.

We bevelen bestudering van mevrouw Krygowska's rapport met het oog op de ontwikkeling van de didactiek van het wiskunde-onderwijs in Nederland van harte aan.

1. *Introduction.*

Les matériaux présentés par les sous-commissions nationales de la CIEM concernant la question du développement de l'activité mathématique de l'élève et le rôle des problèmes dans ce développement sont assez restreints. Neuf sous-commissions seulement ont envoyé leurs rapports, et il est très regrettable que certains pays, particulièrement engagés dans la réforme de l'enseignement des mathématiques n'aient pas participé à ce travail. De plus, la documentation élaborée par ces sous-commissions est très peu homogène en ce qui concerne tant le contenu que la forme. P.e. le rapport de la sous-commission de la Grande-Bretagne est présenté sous forme d'une collection très abondante d'articles, de compte-rendus d'expériences particulières, de discussions, d'annonces de recherches en cours.

Le rapport des Etats-Unis est composé de neuf articles, exprimant les opinions indépendantes de leurs auteurs. Le rapport allemand présente un article de synthèse et, en outre, à part une collection d'articles choisis de Georg Steiner et de Martin Wagen-

schein. Les autres sous-commissions nationales au contraire ont formulé des opinions unifiées, mais certains de ces rapports sont trop concis, ou bornés à des remarques trop générales. Il est donc compréhensible qu'il m'était très difficile, à base de tels matériaux incohérents, très intéressants d'ailleurs, d'élaborer un compte-rendu synthéthique, englobant tous les aspects de la question considérée, révélés dans les rapports.

J'ai décidé donc de concentrer mon rapport seulement sur quelques problèmes choisis, qui semblent être aujourd'hui les plus importants et les plus urgents.

2. *Position contemporaine de la question.*

Les problèmes que nous allons discuter ne sont pas nouveaux. Une certaine forme d'enseignement actif a été propagée déjà par Socrate. Et depuis le commencement de notre siècle, tous les pédagogues et les réformateurs de l'enseignement des mathématiques, comme p.e. les créateurs du programme de Méran et les partisans fervents des conceptions pédagogiques de Felix Klein, ont souligné le rôle de l'activité mathématique personnelle et multilatérale de l'élève dans son initiation au monde des idées mathématiques. Le principe de „l'enseignement par solution de problèmes" est une conséquence si immédiate de la nature même des mathématiques, que George Polya exprime, dans son article inclus dans la documentation préparée par la sous-commission des Etats-Unis, son étonnement qu'une vérité si évidente exige encore une discussion nouvelle.

Il écrit: „La solution des problèmes a été la charpente de l'enseignement des mathématiques depuis le temps du Papyrus Rhind. L'oeuvre d'Euclide peut être considérée comme une contribution pédagogique consistant dans la dissection du grand sujet de la géométrie en des problèmes faciles à dominer. Le problème est, selon mon opinion, aujourd'hui aussi la charpente de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire et je suis gêné d'être obligé de souligner et de motiver une chose si évidente". [1])

Les rapports norvégiens, suédois et allemands constatent que „l'école active" (Arbeitschule) est devenue dans ces pays – il y a déjà des dizaines d'années – le principe fondamental de la pédagogie des mathématiques. Selon les rapports espagnols et suisses, l'enseignement des mathématiques dans ces pays est basé sur l'activité constructive de l'élève. Dans tous les pays d'ailleurs on utilise des procédés heuristiques de l'initiation des élèves aux notions, aux

[1]) [12] p. 5.

théorèmes et aux méthodes mathématiques. Chaque cours contient une partie consacrée à la solution des problèmes, dans chaque manuel l'élève trouve des listes de questions, qui peuvent et doivent être les thèmes de sa recherche personnelle. On pourrait donc presque partout considérer la situation pédagogique concernant le dé veloppement de l'activité mathématique des élèves comme bonne. Une analyse plus profonde de la réalité scolaire dissipe néanmoins cette illusion.

Il y a beaucoup de raisons justifiant la mise à l'ordre du jour de la discussion de la CIEM de la question envisagée.

1⁰ En réalité il existe *un grand abîme entre le principe pédagogique de l'école active „et la manière de son incorporation dans „l'enseignement des mathématiques pour tous"*, cet enseignement qui devrait nous intéresser particulièrement. L'activation des élèves bien doués, groupés dans des classes sélectionnées ne pose pas de problèmes difficiles. Ici la rencontre de l'intelligence ouverte à la recherche avec la nature même de la science si opérative, si stimulante, crée une situation favorable à „l'enseignement par les problèmes". Mais ce qui est plus difficile et plus important, c'est de trouver les procédés favorables à l'activation mathématique de la majorité des élèves moyens ou plus faibles, étudiant dans des conditions ordinaires, souvent même dans des écoles très modestes. L'analyse objective des obstacles et des facteurs positifs pourrait être très utile.

2⁰. *Les conceptions de „l'enseignement par les problèmes" sont très différenciées.* Une certaine entente donc, même approximative, concernant les termes tels que „l'activité mathématique", „mathématiques propres de l'élève", etc., est évidemment nécessaire.

3⁰. *La modernisation des programmes, du langage, de l'esprit même des mathématiques élémentaires pose des questions nouvelles* exigeant des recherches et des solutions rapides. La réforme a plutôt fait des progrès en ce qui concerne la construction théorique d'un édifice cohérent et solide de mathématiques scolaires modernisées en ce qui concerne les méthodes de la réalisation concrète en classe des idées nouvelles. C'était compréhensible d'ailleurs, pour beaucoup de raisons, mais c'était aussi la cause de beaucoup de malentendus, car ce décalage a été et est encore aujourd'hui une source de la méfiance de principe, exprimée par certains pédagogues et mathématiciens éminents relativement à la possibilité et à la nécessité de l'introduction des mathématiques, dites modernes, dans l'enseignement scolaire. Une imagination pédagogique particulière a été indispensable à la conviction à priori que l'esprit moderne des structures mathématiques abstraites peut être harmonisé avec la

voie génétique dans l'enseignement. On a déjà beaucoup fait dans ce domaine; il suffit de mentionner comme un exemple remarquable les travaux exécutés et développés continuellement en Belgique, mais il y a encore beaucoup à faire. Les mathématiques élémentaires traditionnelles disposaient d'une réserve très riche de problèmes de différents degrés de difficulté, réserve qui était le résultat des travaux scientifiques et pédagogiques exécutés au cours de nombreuses dizaines de siècles. Ces problèmes ont été bien adaptés au programme et à l'esprit des mathématiques de l'école traditionnelle. Le banissement de la géométrie classique d'Euclide de l'enseignement scolaire élimine de même la plupart de ces problèmes, critiqués énergiquement d'ailleurs par certains réformateurs des mathématiques élémentaires, mais aussi hautement appréciés par d'autres mathématiciens contemporains qui y voient une bonne école de la pensée mathématique avec ses aspects intuitifs et logiques. Le vide ainsi créé par la révolution d'aujourd'hui doit être remplacé par un système de base de problèmes nouveaux, de différents degrés de difficulté, accessibles à l'élève moyen, ouverts à sa recherche personnelle et harmonisés avec le contenu et l'esprit des programmes modernes. La notion même du „bon problème", bon aussi au point de vue scientifique et méthodologique qui au point de vue pédagogique, mérite d'être éclaircie. Toutes ces questions devraient être discutées largement et concrètement.

4⁰. *Des questions analogues surgissent en jonction avec la construction axiomatique du cours moderne*; il est compréhensible que cette construction à priori ne s'accorde pas par elle même avec la recherche tout à fait libre de l'élève, recherche basée sur les procédés génétiques et intuitifs dans le sens postulé p.e. par Wagenschein, et Wittenberg, ou par certains auteurs participant au rapport anglais. Il y a ici un grand problème pédagogique et méthodologique, qu'on ne doit pas passer sous silence.

5⁰. *Les applications modernes des mathématiques ont dépassé les limites définies par les objets classiques de cette discipline*: nombre et forme géométrique. La question se pose – comment et dans quelle mesure pourrait-on et devrait-on inclure dans les travaux mathématiques personnels des élèves les exemples sérieux et instructifs des applications du genre nouveau, quelles applications seraient ici les plus éducatives et les plus utiles.

6⁰. La dernière question enfin concerne *la préparation des professeurs à „l'enseignement des mathématiques par les problèmes"*. C'est une question particulièrement urgente au moment de la modernisation révolutionnaire du contenu et de la construction des

mathématiques élémentaires.

Dans la suite, je voudrais concentrer mon rapport sur les trois questions suivantes:
1°. conceptions différentes de l'activation mathématique des élèves;
2°. facteurs favorables et facteurs défavorables au développement de l'activité mathématique des élèves;
3°. problèmes dans le contexte moderne des programmes des mathématiques.

3. *Conceptions de l'activation mathématique des élèves.*

Les interprétations de „l'enseignement actif des mathématiques" sont très différenciées et l'analyse des rapports présentés par les sous-commissions nationales de la CIEM révèle que les mêmes termes ont souvent une signification différente. Les différences concernent avant tout *la relation de deux facteurs fondamentaux intervenant dans chaque enseignement; la transmission aux jeunes des connaissances, des expériences et des méthodes de la pensée élaborées par les adultes d'un côté et la découverte libre et la création libre faites par les éléves euxmêmes.* La clef de voute de la conception pédagogique réside dans la réponse à la question: ces deux facteurs sont-ils essentiellement opposés où, au contraire, sont-ils essentiellement liés en un seul processus.

Les opinions les plus extrêmes dans ce domaine sont présentées par certains fragments du rapport anglais (15), concentré d'ailleurs avant tout sur le développement de l'activité mathématique des élèves les plus jeunes.

Le rapport anglais souligne fortement les divergences qui opposent la pensée des adultes à la pensée des élèves, en constatant expressément „Chaque adulte a ses habitudes dans les domaines de la pensée et de l'action qui sont devenues sa seconde nature. Il lui est très difficile d'avoir la conscience de cette longue voie qu'il a traversée dès sa naissance . . . Le professeur de mathématiques passe par l'étude propice, conventionnelle et formelle des mathématiques. Il a tendance à penser que ses propres méthodes, son niveau, ses idéaux sont appropriés aussi à ses élèves. Beaucoup d'enfants n'acceptent pas de buts de ce type, ce qui conduit aux insuccès, à la prostration, au désespoir. Et la conséquence, c'est la rejection complète des mathématiques".[1])

---

[2]) [15] p. 20—21.

„Le point de vue de l'enfant est immédiatement rejeté par l'adulte pour deux raisons: a) l'enfant donne une réponse fausse, b) son point de vue ne s'accorde pas avec le point de vue de l'adulte [1]) L'auteur met en doute le droit des adultes à cette attitude, en citant les thèses aujourd'hui évidemment fausses, qui ont été reconnues comme vérités absolues par les adultes des siècles antérieurs. En conséquence, il formule le postulat suivant: „L'essentiel dans l'initiation aux mathématiques créatrices c'est d'assurer aux enfants leur développement naturel. Il ne faut pas que les enfants acceptent la conception imposée par le monde adulte, qui leur est étrangère (peut-être inaccessible à leur âge et à leurs aptitudes)". [2])

Une condition sine qua non de la mise en oeuvre de ce postulat dans la réalité scolaire est la connaissance de la pensée de l'élève à chaque étape de son développement. Cette connaissance ne peut être acquise – selon le rapport – que par l'observation continue et objective des réactions spontanées des élèves à des situations problématiques, ce qui exige aussi la non-intervention du maître dans l'activité des enfants.

Certains fragments du dossier anglais sont consacrés à la notion même de l'activité mathématique de l'enfant et de l'élève, cette activité – selon l'opinion des auteurs – ne devant pas être à priori définie et limitée par les mathématiques des adultes. L'enfant veut et peut créer sa propre mathématique. La tâche du maître n'est que d'assurer une situation initiale, provoquant et délivrant l'activité de l'enfant, activité qui se développe dans la suite indépendamment, sans intervention directe de l'enseignant. Les auteurs pensent à une véritable création en constatant: „En vue de développer les sources les plus larges de l'intelligence humaine, il serait plus important de penser à la création des mathématiques qu'a leur découverte". [3]) On pose la question: „Raconterons-nous donc à nos élèves les mathématiques et leur donnerons-nous des occasions à l'activité mathématique répétée au cours du travail direct sur des exemples soigneusement choisis? Il serait injuste de considérer qu'il n'y a pas d'activité mathématique dans ce procédé. Mais il est vrai que l'expérience créatrice ne serait pas ainsi mise en évidence et peut-être faudrait-il ne qualifier „l'activité mathématique" que comme „une expérience créatrice". On pose aussi l'accent plutôt sur le processus de la création que sur son effet. On écrit „La valeur

[1]) [15] p. 22.
[2]) [15] p. 22.
[3]) [15] p. 18.

consiste dans l'activité créatrice et non dans ce qu'on a créé". Et malgré le fait que l'auteur luimême pose la question „dans quelles limites ce serait justifié"?[1]) l'esprit général de certains fragments du rapport suggère que ces limites devraient être assez vagues et à priori largement ouvertes.

L'activité mathématique primaire de l'enfant – selon l'opinion présentée dans le rapport anglais – n'est que la prise de conscience de „la même chose" dans des situations différentes, cette „même chose" dépendant du point de vue admis.[2])

L'enseignement au niveau inférieur devrait avoir le caractère de „incidental learning"[3]), dépendant de l'atmosphère du groupe, dans les situations naturelles, provoquent les activités spontanées de l'enfant. A ce niveau les problèmes doivent être résolus par les enfants apparemment sans effort, presque immédiatement. La gradation des difficultés et l'organisation progressive de ces recherches libres dans un système cohérent de la science, avec conservation du principe de „l'activité libre" et des „mathématiques propres" de l'élève, semble être le problème crucial de cette pédagogie originale, développée dans le rapport d'une manière très intéressante et éclairée de beaucoup de points de vue individuels de nombreux auteurs. Le lecteur du rapport s'égare souvent dans la richesse des idées très instructives mais seulement esquissées. Ce qui lui manque, c'est la mise en évidence que cette suite d'activités créatrices de l'élève, délivrées seulement avec l'intervention minime du maître peuvent aboutir finalement à la solution du problème cité dans le rapport: „Démontre la convergence ou divergence des séries: „$\Sigma\frac{1}{r}$, $\Sigma\frac{1}{2r}$". Le problème de ce passage – comme je l'ai dit crucial pour cette pédagogie – semble être encore ouvert.

La conception de Martin Wagenschein (4) présentée dans le rapport allemand demande apparemment la même chose, c'est-à-dire la nonintervention possible du maître dans la recherche mathématique de l'élève. Mais l'analyse du compte-rendu des leçons dé-

---

[1]) [15] p. 24.

[2]) Evidemment les auteurs ont raison que cette prise de conscience est le premier pas et le plus important dans la direction du monde abstrait des structures. Mais – ce procédé n'est pas spécifiquement mathématique. La classification opérative des situations d'un point de vue imposé par le besoin matériel ou intellectuel particulier c'est la genèse de la pensée abstraite en général; l'identification de ce processus avec la pensée mathématique efface les frontières délimitant les mathématiques des autres sciences.

[3]) [15] p. 51.

crites dans cet article révèle le contraire. Ce qui est important – selon cette conception – c'est le genre, le caractère de cette intervention.

L'auteur caractérise les étapes de cette intervention de la manière suivante:

1°. La première tâche du maître, c'est le choix du problème, qui ne serait ni trop facile ni trop difficile, c'est-à-dire qui n'exigerait pas de connaissances trop larges d'une part, mais qui ne pourrait être résolu sans un effort intense de la pensée de l'autre. Ce qui est aussi important, c'est le choix d'un problème qui a la possiblité d'être résolu par les élèves, en groupe, sans le dictat du maître.

2°. Le maître assure les moyens nécessaires à la résolution du problème.

3°. Le maître aide essentiellement la compréhension de la question par tous les élèves. Souvent il doit à cette étape beaucoup expliquer, beaucoup parler; mais le moment viendra, où il commence en principe à se taire.

4°. Néanmoins, aussi dans la suite, son intervention sera nécessaire de temps en temps. Mais cette intervention ne consiste pas dans le fait, qu'il précède le groupe des élèves; au contraire il provoque des moments de la réflexion, de la synthèse, de l'arrêt dans la croissance de la tension, pour préciser la situation: où sommes nous? qu'est-ce-que nous voulons?

La conception de Wagenschein oppose à l'éducation mathématique „encyclopédique" l'enseignement défini comme „Exemplarisches Lernen der Mathematik" c'est-à-dire l'enseignement basé sur l'étude multilatérale faite par les élèves avec la collaboration du maître – décrite ci-dessus – des problèmes peu nombreux mais méthodologiquement bien choisis. Au cours de cette étude les élèves doivent passer – selon l'auteur – par les étapes différentes d'une véritable recherche scientifique. L'accent est mis sur la prise de conscience par les élèves mêmes de la voie intellectuelle qui les a conduits à la solution. L'accent est mis aussi sur le travail en groupe, sur la discussion, sur la confrontation des résultats des travaux individuels.

„Exemplarisches Lernen" s'oppose aussi à la conception des mathématiques élémentaires conçues comme un édifice logiquement cohérent à priori construit sans lacunes. La synthèse des fragments étudiés profondément par les élèves devrait se réaliser – selon cette conception – plutôt à la base des méthodes de la pensée mathématique concentrée sur les questions locales, que sur la construction totale des matières.

Malheureusement cette conception pédagogique, évidemment originale, n'est illustrée que par des exemples trop traditionnels non seulement dans leur contenu mais aussi dans leur esprit. En discutant cette conception il nous faut discerner et isoler ces deux aspects.

L'activité mathématique de l'élève – ainsi selon le rapport anglais que selon la conception de Wagenschein – devrait s'exprimer aussi dans sa réflexion à posteriori concernant le problème déjà résolu: jeter le regard en arrière, analyser les causes du succès ou insuccès, comparer les résultats, revenir au même problème, en vue d'améliorer la méthode de la solution, „prolonger" le problème dans un autre, „généraliser", spécifier etc.

Evidemment l'enfant et l'élève le plus jeune sont souvent inaptes à la revision et à la systématisation à posteriori de leurs activités mathématiques, qui sont encore trop spontanées. L'attention de l'enfant est concentrée sur chaque manipulation réelle ou pensée à part et sur l'effet de son travail. Mais à un moment approprié on devrait commencer à organiser des situations favorables à cette réflexion à posteriori. En élaborant un schéma compte-rendu des opérations exécutées l'élève découvre de même le schéma-projet des opérations, appliquables aux situations analogues, ou prend la conscience d'une stratégie effective, ou au contraire d'un procédé qu'on doit éviter. Nos observations prouvent qu'une des raisons des échecs des élèves moyens, malgré leur travail et leur bonne volonté, est justement le manque, souvent complet, de situations de ce genre organisées consciemment en classe par le maître, où l'on analyse la voie déjà parcourue du point de vue de la méthode et de la stratégie, et où on prend la conscience des perspectives problématiques nouvelles. La remarque concernant cette question, dans tous les deux travaux jusqu'alors analysés sont de grande valeur pédagogique.

Je me suis arrêté assez longuement à certains fragments du rapport anglais ainsi qu'à certaines idées de Martin Wagenschein, car j'y trouve deux conceptions originales, différentes évidemment, mais dans le même degré radicales en comparaison avec les autres conceptions de l'activité mathématique de l'élève, présentées dans la majorité des rapports, même dans les autres fragments du rapport anglais et dans le rapport synthétique allemand.

Ces conceptions – les plus répandues visent dès le commencement, même dans l'enseignement des élèves les plus jeunes, les mathématiques élémentaires, conçues comme un système cohérent, construit selon certains critères scientifiques, pratiques et éducatifs, à la base des mathématiques d'aujourd'hui, et dont l'échafaudage est exprimé dans le programme scolaire. L'activité mathématique de l'é-

lève serait – selon cette conception – définie à priori par ce fait historique et social: la mathématique a son étape contemporaine, science caractérisée par son contenu, par ses problèmes, par son langage, par ses méthodes de recherche, par ses relations avec les autres sciences et par le type de son rapport au réel.

Georg Polya écrit dans son article inclus dans le rapport de la Sous-commission des Etats-Unis: „L'enseignement doit englober tous les aspects principaux de la pensée du mathématicien, dans la mesure accessible à l'école secondaire".[1]) Dans le même rapport Florence Jacobson constate: „Ceux qui critiquent les programmes modernes visent comme un but de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire le „savoir-faire". On postule que l'enseignement de la solution des problèmes développe ce „savoir-faire". Mais, pour pouvoir résoudre les problèmes, l'élève doit apprendre les mathématiques".[2])

De quoi s'agit-il, de quelles mathématiques et de quelle „pensée du mathématicien"? Evidemment telles que nous les connaissons aujourd'hui; la tâche de l'enseignement, c'est justement l'initiation de l'élève à certaines connaissances et à certains procédés de la pensée, à priori approximativement définis par le développement historique des mathématiques et par les expériences intellectuelles des mathématiciens.

La transmission des expériences intellectuelles de la génération qui précède la génération prochaine est évidemment la condition sine qua non du progrès social, économique et culturel de l'humanité. Ce n'est qu'une illusion que l'on puisse enseigner sans la transmission. Même l'activité tout-à-fait spontanée de l'enfant manipulant avec le matériel structure p.ex. avec les réglettes de Cuisenaire, est à priori conditionnée par la construction de ce matérial, construction exprimant dans ce modèle les structures mathématiques définies et visant finalement à la transmission des idées mathématiques définis et visant finalement à la transmission des idées mathématiques sous-jacentes.

Mais transmettre et imposer ce sont des procédés extrêmement différents. Dans la majorité des pays, où l'enseignement des mathématiques est basé sur ces programmes obligatoires, ou facultatifs, le principe de l'enseignement actif exprime l'idée de la transmission activante, de la transmission du genre de l'estafette.

La condition sine qua non de cette transmission, c'est la colla-

---

[1]) [12] p. 3.

[2]) [8] p. 1.

boration continue, profonde et multilatérale du maître et des élèves, aussi dans le développement de la théorie que dans son apprentissage. Le professeur prévoit une suite de situations problématiques au cours desquelles le sujet défini par le programme est élaboré en classe, et éventuellement complété par le travail individuel à domicile. Ce projet préliminaire du maître devrait être très élastique suivant les réactions des élèves, donc susceptible de changements suivant les procédés réels de la pensée des enfants, mais aussi assez solide quant aux buts qui, selon le programme, devraient être atteints. La collaboration du maître et des élèves s'exprime dans des formes différentes: explication, exposé, remarques méthodologiques du professeur, questions posées par le maître ou par les élèves, recherche d'une situation problématique ou solution du problème en groupe, recherche individuelle, discussion, révision et analyse des résultats obtenus au cours de cette recherche, leur rédaction individuelle et en groupe, travaux faits à domicile, leur analyse et appréciation en classe, exercises ayant pour but l'apprentissage des habiletés nécessaires, exposés faits par des élèves et basés sur la lecture mathématique, lecture en groupe d'un texte mathématique, son analyse, son complément et développement actif etc.

La construction du cours, basée sur la distribution juste de tous ces procédés, adéquats aussi quant au thème du travail qu'aux autres conditions (l'âge des élèves, leur éducation précédente, l'equipement de l'école concernant les matériaux concrets et les livres) est un problème pédagogique primordial et exige une maîtrise et une finesse pédagogique excellentes ainsi qu'une préparation scientifique en mathématiques très profonde.

Je voudrais ajouter ici quelques remarques reflétant les questions discutées en Pologne, dont l'analyse nous a conduit à des conclusions souvent opposées à celles qui ont été exprimées dans certains autres rapports. Nous observons que beaucoup de nos étudiants moyens, pendant la première année de leurs études supérieures en mathématiques se heurtent souvent à de grandes difficultés, provoqués par le changement rapide des méthodes de l'enseignement. Il leur est extrêmement difficile de suivre activement un exposé du professeur, prendre des notes, comprendre le sens du texte verbal ou symbolique d'un livre ou d'une revue mathématique. A l'école primaire et à l'école secondaire ils ont été habitués à des procédés demi-génétiques: p.e. les définitions ont été formulées le plus souvent après les observations et les expériences particulières, et de cette manière la définition n'était qu'un compte-rendu verbal des notions précédemment intuitivement saisies. Quand il faut exécuter

le travail inverse, p.e. débrouiller les opérations nécessaires à la construction mentale d'un objet abstrait à la base d'une définition mathématique donnée à priori, beaucoup d'étudiants-débutants restent perplexes, ou se contentent d'une prise de conscience très superficielle qui, dans la suite de leurs études, s'avère comme incompréhension de la notion en jeu.

Il n'est pas nécessaire de décrire ici ces expériences, bien connues de chacun qui a étudié les mathématiques. Mais il ne faut pas passer sous silence nos propres expériences quand nous discutons sur le développement de l'activité mathématique des élèves. Nos recherches et nos sondages dans les écoles secondaires révèlent des difficultés frappantes dans ce domaine (même s'il s'agit de la lecture du manuel mathématique scolaire), mais d'autre part prouvent que le travail des élèves sur le canevas du texte mathématique peut être organisé consciemment et méthodiquement comme une situation problématique particulièrement instructive. Dans le rapport suédois (18): on constate „il est vraiment difficile aux élèves d'apprendre les mathématiques à partir du manuel". Le rapport norvégien (17) demande expressément: „les manuels doivent être plutôt placés à l'ombre". Nous apercevons ici au contraire un problème sérieux de la pédagogie des mathématiques qui ne devrait pas être éludé à priori, mais qui exige une solution raisonnable. Les recherches dans ce domaine se trouvent en cours p.ex. en Pologne.

Evidemment, le „piochement mécanique verbal" du manuel devrait être absolument éliminé, mais il faut introduire l'élève consciemment dans la technique de l'utilisation active du livre mathématique, cette source principale d'information scientifique depuis l'invention de Guttenberg.

Dans le rapport anglais Dr. Skemp écrit: „En général, le nouveau concept ne peut pas être transmis par une définition".[1]) Evidemment c'est vrai dans ce sens que cette transmission n'est pas directe, qu'elle exige un travail actif de la pensée de celui qui tâche de saisir une notion à la base de la définition verbale. Et cette activité devrait être développée justement dans le même degré que l'activité inverse de définir précisément une notion élaborée par le processus de l'abstraction. Nos recherches en Pologne prouvent p.ex. que la première réaction des élèves à l'âge de 14–15 ans à une définition verbale s'exprime souvent dans l'essai de saisir le sens immédiatement, sans effort intellectuel, sans analyse, et seulement par une „lecture contemplative" répétée plusieurs fois de la même

---

[1]) [15] p. 200.

manière. L'élève semble attendre une inspiration rapide, il ne sait pas ce qu'il lui faut faire pour comprendre. Découragé, il constate souvent: „je ne comprends rien, c'est tout à fait embrouillé". La lecture commune en classe, la transformation du texte dans la description d'une suite d'opérations conduisant à la construction d'un modèle de la structure définie, faite par les élèves mêmes avec l'aide patiente du maître, aide limitée à la méthode et à la technique de ce travail, change l'attitude passive du jeune lecteur. Le caractère opérationnel des mathématiques facilite ce passage de la contemplation passive et improductive du texte au travail conscient. L'élève s'étonne: „Je ne comprends pas pourquoi je n'aie pas compris". Il apprend pas à pas, au cours d'expériences partielles, répétées de temps en temps dans des situations diverses, comment il lui faut attaquer le texte mathématique. Les travaux de ce type, inclus consciemment dans les autres activités, sont très instructifs. P.ex. les élèves ont trouvé une démonstration différente de celle qui a été donnée par l'auteur du manuel. On analyse le texte, on compare, on apprécie. Nous constatons que les exigences de l'élève concernant la précision surgissent au fur et à mesure de cet apprentissage.

L'élimination complète des études basées sur l'exposé du maître ou sur la lecture du manuel mathématique, en tant que procédés dits „réceptifs" en opposition aux autres dits – „activants", conduit – selon les expériences polonaises – à l'appauvrissement des genres d'activité de l'élève. C'est pourquoi l'instruction associée au nouveau programme des mathématiques en Pologne accentue la nécessité de l'utilisation de méthodes diverses en vue de développer les mécanismes divers de la pensée, nécessaires à la compréhension et à la transmission, à l'apprentissage et à la découverte, à la création et à l'application des idées mathématiques. L'enseignement des mathématiques pour tous les enfants, ainsi conçu, dépasse les buts de l'éducation mathématique même et devient un facteur essentiellement important de l'éducation générale.

Nous avons jusqu'à présent analysé le concept de l'activité mathématique de l'élève dans la lumière de la relation: transmission – découverte. Dans certains rapports on fait cette analyse d'autres points de vue. Dans le rapport anglais p.ex. O. Gilles discerne les activités mathématiques de trois types: création, intégration et consolidation, en demandant leur équilibre dans l'organisation pédagogique des activités des élèves. Dans le même rapport R. Skemp traite la question du point de vue de deux catégories psychologiques: l'assimilation d'une situation problèmatique dans le schéma connu et l'adaptation créatrice du schéma à la situation nouvelle,

qui ne peut pas être assimilée dans les schémas connus. Le rapport allemand présente en détail, dans l'article de Hermann Athen(1), le projet pédagogique du développement de l'activité mathématique des élèves en liaison avec le nouveau programme, dit ,,programme de Nuremberg", discuté largement en Allemagne Fédérale. Nous trouvons ici une conception très soigneusement élaborée des étapes consécutives de ce développement. L'activité des enfants au cours des premières quatre années de l'enseignement est dirigée vers les opérations fondamentales de la pensée dans le sens de la psychologie de l'intelligence de Piaget et organisée selon les idées de l'enseignement opératif de Aebli et de Fricke avec l'utilisation multilatérale des matériaux structurés. L'étape suivante (5-ème, 6-ème et 7-ème année d'enseignement) malgré son caractère propédeutique et inductif et malgré ses buts pragmatiques (calcul, faits géometriques) prépare les idées fondamentales de la méthode mathématique même au cours des exercices numériques. L'expérience géométrique est basée sur les modèles et sur les constructions classiques, avec la mise en relief des transformations et de l'interprétation ensembliste des faits géométriques. Le principe de ,,Exemplarisches Lernen" de Wagenschein – selon le rapport – peut et doit trouver à cette étape sa réalisation adéquate.

L'étape suivante (8-ème, 9-ème, et 10-ème année d'enseignement) peut être caractérisée comme étape du complément systématique et de la mise en évidence des structures mathématiques sous-jacentes aux matières partiellement déjà connues et maintenant développées dans un esprit nouveau. On passe graduellement de l'organisation locale déductive, caractéristique pour l'étape précédente, à l'organisation plus globale. La dernière étape enfin (11-ème, 12-ème et 13-ème année d'enseignement) concentre l'activité des élèves sur l'approfondissement méthodologique et sur les applications des mathématiques.

Je reviendrai encore ci-après aux autres idées du rapport allemand; ce qui nous intéresse ici, c'est programmation des genres des activités mathématiques des élèves aux niveaux différents en liaison étroite avec le contenu et la construction des mathématiques élémentaires, liaison reversible dans ce sens que, si le contenu définit le genre de l'activité, le développement planifié de certaines activités crée des conditions favorables à l'introduction et à l'assimilation du contenu prévu pour le niveau consécutif.

Comme nous voyons, l'expression ,,activité mathématique de l'élève" peut être et est en réalite interprétée différemment dans un sens plus ou moins large ou plus ou moins vague. Elle peut être

aussi analysée de points de vue très divers. L'essentiel reste néanmoins commun: la conviction exprimée dans tous les rapports que la tâche la plus importante de la pédagogie des mathématiques d'aujourd'hui c'est la concentration du processus de l'enseignement sur la participation consciente et créatrice de l'élève dans le sens le plus concret et le plus honnêtement interprété de ce terme, ce qui implique de même le développement continu et effectif de son activité mathématique multilatérale.

OVER DE GEBROKEN ONGELIJKHEID

door

R. KOOISTRA

Ede

1. In acht algebraleerboeken gingen we de oplossing na van de gebroken ongelijkheid: $a/b > 0$. We kwamen tot de onthutsende ontdekking dat in zes ervan geen gebruik gemaakt wordt van de eenvoudige eigenschap:

$$\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$$

$$\frac{a}{b} \geqq 0 \Leftrightarrow ab \geqq 0 \wedge b \neq 0.$$

Zijn a en b lineaire functies van x, dan is door deze eigenschap met één slag de gebroken ongelijkheid teruggebracht tot de kwadratische ongelijkheid.

Vijf leerboeken passen de o.i. omslachtige methode toe, waarbij het tekenverloop wordt nagegaan van de teller, van de noemer en daaruit dat van het quotiënt. (In twee leerboeken wordt zelfs een analoge methode gebruikt voor de kwadratische ongelijkheid, door het tekenverloop na te gaan van de beide factoren en daaruit dat van het produkt: met de drie hierbij nodige getallenrechten neemt zo'n oplossing met de toelichting dan ook een halve bladzijde in beslag).

We nemen een voorbeeld uit één van de acht genoemde leerboeken [1]):

[1]) Coster, van Dop en Streefkerk, *Nieuwe Algebra voor het eindexamen*, blz. 77.

$$\frac{2x+1}{3x+5} > \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{2x+1}{3x+5} - \tfrac{1}{2} > 0$$

$$\frac{x-3}{2(3x+5)} > 0; \quad \frac{x-3}{6(x+\frac{5}{3})} > 0; \quad \frac{x-3}{x+\frac{5}{3}} > 0$$

Hierna wordt het tekenverloop getekend van $x - 3$, $x + 5/3$ en daarna dat van het quotiënt, om dan te besluiten tot de oplossing: $x < -5/3$ of $x > 3$. De leerling wordt aangeraden zich eraan te wennen slechts de onderste van de drie getallenrechten te tekenen.

Wij voor ons houden het maar op de volgende methode:

$$\frac{2x+1}{3x+5} > \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2(3x+5)} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(3x+5) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x < -5/3 \vee x > 3,$$

waarbij we voor de laatste conclusie de getallenrechte tekenen en een schets van de grafiek van $(x-3)(3x+5)$.

In één leerboek wordt direct het tekenverloop getekend van de functie a/b; gebroken ongelijkheden kunnen dan dus niet eerder aan de orde gesteld worden dan na de behandeling van die functie.

Vermeldenswaard is nog de oplossing, die we in een recente uitgave [1]) tegenkwamen; een novum, naar ons voorkomt. Hierbij hoeft niet eerst op nul te worden herleid:

$$\frac{2x+1}{3x+5} > \tfrac{1}{2}.$$

Vermenigvuldig beide leden met $2(3x+5)^2$: (de eis $x \neq -5/3$ is overbodig; niet, indien $>$ vervangen wordt door $\geqq$)

$$2(2x+1)(3x+5) > (3x+5)^2$$
$$(3x+5)(x-3) > 0$$
$$x < -5/3 \vee x > 3.$$

Laten we deze methode ook eens toepassen op een ander voorbeeld uit hetzelfde, reeds vermelde, leerboek:

Los a op uit $3a < 1/a < 2$.

Opl.: We vermenigvuldigen de drie leden met a^2:

$$3a^3 < a < 2a^2$$

---

[1]) C. J. Alders, *Algebra voor m.o. en v.h.o.*, dl. 2b, blz. 43.

gelijkwaardig met $a(3a^2 - 1) < 0 \wedge a(2a - 1) > 0$
hetgeen (met getallenrechten) geeft:

$$(a < -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \vee 0 < a < \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) \wedge (a < 0 \vee a > \tfrac{1}{2})$$

dus is de oplossing:

$$a < -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \vee \tfrac{1}{2} < a < \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Inderdaad eleganter, zo is ons oordeel, dan de vervanging door de ongelijkheden $3a < 1/a$ en $1/a < 2$.

2. Tegen het aflezen van de oplossing van een ongelijkheidsopgave uit de grafiek van het linkerlid (van de op nul herleide ongelijkheid), waaraan wij ons zojuist bij de oplossing van $(x - 3)(3x + 5) > 0$ schuldig maakten, voert dr. Joh. H. Wansink in zijn *Didactische orientatie voor wiskundeleraren II* (pag. 267—268) de volgende bezwaren in. Wij citeren:

„Waarom verdient *in eerste instantie* (cursivering van ons, R.K.) deze behandeling [d.i. met getallenstrepen] de voorkeur boven die, waarbij de antwoorden worden afgelezen uit de *grafieken* van de functies $(x + 2)(x + 3)$ en $x + 2/x - 3$? Het ontwerpen van deze grafieken ter oplossing van de ongelijkheidsopgaven betekent een eenvoudig probleem op onnodig ingewikkelde wijze oplossen".

Ten aanzien van het tekenen van de grafiek van de *kwadratische* functie bij de oplossing van een ongelijkheidsopgave — uit 1 blijkt immers, dat we die van een *gebroken* functie nimmer nodig hebben — zou men kunnen opmerken, dat het met de genoemde ingewikkeldheid wel meevalt, waar we slechts een *schets* van de grafiek nodig hebben; het woord ontwerpen is in dezen dan ook wel wat zwaar geladen. Dit is echter een zwak verweer. De schrijver bedoelt uiteraard: *de theorie van de kwadratische functie is onnodig* voor de oplossing van een kwadratische ongelijkheid en dat willen we gaarne toestemmen.

Gevoeliger nog zijn we voor het volgende bezwaar:

„Er is bovendien nog dit bezwaar. Wie de grafiek tekent, maakt daarbij gebruik van de oplossing van de desbetreffende ongelijkheidsopgaven".

Wie dan ook geen gebruik wil maken van een figuur, hetzij van een grafiek hetzij van (een) getallenrechte(n), diene zijn oplossing te noteren als in het volgende door de schrijver gegeven voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 > 0 &\Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2 > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (x + 2 < 0 \wedge x - 3 < 0) \\ &\Leftrightarrow (x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3) \\ &\Leftrightarrow (x > 3) \vee (x < -2) \end{aligned}$$

Passen we deze methode, hoe ideaal ook, echter toe op b.v.

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x+5)} \geqq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x+5) \geqq 0 \wedge x \neq -5,$$

dan zien we, dunkt ons, bij velen toch wel bezwaren rijzen. Het is dan ook met voldoening, dat wij de volgende opmerking van de schrijver doorgeven:

„De behandeling van de grafieken van de kwadratische en de gebroken functies kan later wel tot een inzicht en een parate kennis leiden, op grond waarvan de oplossingen van ongelijkheidsopgaven voetstoots gegeven kunnen worden”.

3. Bij het verder doordenken over de oplossingsmethode van de *kwadratische* ongelijkheidsopgave kwamen we op de volgende vraag: Als we, ondanks de logisch volkomen verantwoorde oplossing van $x^2 - x - 6 > 0$ onder 2 (dus zonder een figuur), nu om redenen toch van de getallenrechte gebruik willen maken, *is een schets van de grafiek van het linkerlid dan nodig?* Het antwoord moet — en daarmee veroordelen we ook ons zelf — luiden: nee! Immers, bij een derde-graadsongelijkheid, die nog wel eens in de differentiaal-rekening wil optreden, gebruiken we een schets van de bijbehorende grafiek ook niet, doch stellen door het invullen van een x-waarde ergens op de getallenrechte het teken van het linkerlid vast enz.. Welaan, dan kunnen we deze methode ook gebruiken bij een tweede-graadsongelijkheid. In een briefwisseling met Dr. Wansink stelde deze dan ook zeer terecht de vraag:

„Wilt U voor het oplossen van bv. $(x+2)(x-3)(x+5) \geqq 0$ de derdegraadsfunctie behandelen?”

De nu genoemde methode, want algemeen, mag dus onze voorkeur verdienen. Zelfs valt de gebroken ongelijkheid er nog onder, zodat onze ontdekking, waarvan we in 1 repten, minder onthutsend is, dan we aanvankelijk dachten. Echter moeten dan bij deze manier wel de begrippen enkelvoudig nulpunt, tweevoudig nulpunt enz. (desnoods, hoewel overbodig, enkelvoudige pool, tweevoudige pool enz.) door een paar voorbeelden duidelijk gemaakt worden. Een aanvankelijk goede opzet in dezen vonden we in het reeds genoemde boek van C. J. Alders, waarbij eerst (blz. 41) wordt vastgesteld:

$x - a$ verandert van teken als x de waarde a op de getallenrechte passeert.

om daarna het tekenverloop na te gaan van het produkt

$(x - a)(x - b)$ en vast te stellen:

als x een nulpunt passeert dan verandert de functie van teken.

Jammer dat de schrijver het geval van een *tweevoudig* nulpunt in een N.B. afdoet. Het was juist hier de plaats het verschillend gedrag van een functie in de omgeving van een enkelvoudig en van een dubbel nulpunt scherp naar voren te laten komen.

Samenvattend spreken we nu uit:

a. Voor degene, die de kwadratische en (of) de gebroken ongelijkheidsopgave grafisch oplost, heeft de vermelde gelijkwaardigheid onder 1 betekenis.
b. Voor degene, die met *één* getallenrechte en zonder een grafiek de *gebroken* ongelijkheidsopgave oplost, heeft de genoemde gelijkwaardigheid betekenis, maar in mindere mate.
c. Eén getallenrechte is bij het oplossen van ongelijksheidsopgaven voldoende; een grafiek is niet nodig, maar bij *kwadratische* ongelijkheidsopgaven wel nuttig.
d. De methode, waarbij *één* getallenrechte gebruikt wordt zonder een grafiek, is van alle methoden, die een beroep op een figuur doen, de meest algemene.
e. De methode, waarbij geen enkel beroep op een figuur gedaan wordt, is de meest exacte, maar heeft soms praktische bezwaren.

4. *a.* Bij de gebroken modulus-ongelijkheid bv.

$$\left|\frac{3x-6}{x-4} - 3\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left|\frac{6}{x-4}\right| < \frac{1}{1000},$$

heeft men de neiging — met name de leerling — om maar direct te gaan kwadrateren of, nog erger, over te gaan tot het onderscheiden van de gevallen $x > 4$ en $x < 4$. Beide zijn volmaakt overbodig. Immers, men kan „rustig'' met $1000|x - 4|$ vermenigvuldigen:

$$|x - 4| > 6000 \Leftrightarrow x - 4 > 6000 \vee x - 4 < -6000$$
$$\Leftrightarrow x > 6004 \vee x < -5096.$$

b. Het modulus-teken is nuttig bij ongelijkheden van het type $-p < a/b < p$ (dus $p > 0$) door te bedenken:

$$-p < \frac{a}{b} < p \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b}\right| < p,$$

[2]) *Agon-examengids*, Wiskunde I, blz. 13.

die doorgaans sneller en eenvoudiger op te lossen is dan het stelsel

$$-p < \frac{a}{b} \wedge \frac{a}{b} < p.$$

Typen als $\left|\frac{a}{b}\right| < p$ en $\left|\frac{a}{b}\right| > p$ [1]) te vervangen door

$$-p < \frac{a}{b} < p \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} > p \vee \frac{a}{b} < -p$$

is dan ook een flinke stap terug van de gevraagde oplossing. We denken in dit verband ook aan de voorwaarde $-1 < r < 1$ voor een sommeerbare meetkundige rij, als b.v. $r = x^2 - x$ e.d. die de leerling beter kan onthouden in de gedaante $|r| < 1$ of nog liever, $r^2 < 1$.
Men ontkomt, als a een functie is van x, echter niet, (als in 4. a) aan kwadratering van de beide leden. We kiezen een voorbeeld:

$$\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| < \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2|2x-1| < 3|3x+2|$$

(de voorwaarde $x \neq -\frac{2}{3}$ is overbodig)

$$\Leftrightarrow 4(2x-1)^2 < 9(3x+2)^2.$$

Na kwadratering verkrijgt men dus een ongelijkheid van het type $a^2 < b^2$, waarvan het linkerlid, na de herleiding op nul. *steeds eenvoudig te ontbinden is*. Het is dan ook weinig aanbevelenswaardig de kwadraten in het linker- en het rechterlid uit te rekenen [1]) — vaak zelfs zeer ongewenst — en dan op nul te herleiden, dus zo:

$$4(4x^2 - 4x + 1) - 9(9x^2 + 12x + 4) < 0 \Leftrightarrow 65x^2 + 124x + 32 > 0$$
$$\Leftrightarrow (5x+8)(13x+4) > 0 \text{ enz., waar men eenvoudiger heeft:}$$

$$4(2x-1)^2 - 9(3x+2)^2 < 0 \Leftrightarrow$$
$$(4x - 2 - 9x - 6)(4x - 2 + 9x + 6) < 0 \Leftrightarrow$$
$$(5x+8)(13x+4) > 0 \text{ enz.}$$

[1]) Wijdenes en Beth, *Nieuwe Schoolalgebra*, uitgave 6, dl. 4, blz. 12.

VERZAMELINGEN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Nu de verzamelingen een steeds belangrijker rol gaan spelen in het voortgezet onderwijs, is het misschien verstandig iets nader stil te staan bij de betekenis van dit tamelijk mysterieuze woord. Een gebruikelijke omschrijving van „verzameling" is: een verzameling bestaat uit alle dingen, die een bepaalde eigenschap hebben. Voor schoolgebruik een uitstekende omschrijving, die althans aanvankelijk, door ieder wordt begrepen. „Dingen" moet opgevat worden in de meest ruime zin van het woord. De omschrijving is dan zowel binnen de wiskunde als daarbuiten van toepassing. Noteren we de eigenschap $E(x)$, dan is een geschikte notatie voor de verzameling $\{x|E(x)\}$.

Soms voegt men hieraan toe, dat een verzameling ook nog op een andere manier gevormd kan worden, namelijk door opsomming van zijn elementen. Kies drie geheel willekeurige dingen a, b en c. De verzameling, die deze drie dingen als element heeft en geen andere elementen heeft, wordt dan genoteerd $\{a, b, c\}$. Het lijkt mij te ontraden deze ontstaanswijze van verzamelingen naast de vorige te vermelden. Logisch gezien is deze ontstaanswijze van een verzameling een bijzonder geval van de voorgaande. De verzameling $\{a, b, c\}$ is dezelfde als de verzameling

$$\{x|x = a \vee x = b \vee x = c\},$$

dus de verzameling van alle dingen, die de eigenschap hebben gelijk aan a of aan b of aan c te zijn. Het is daarom voldoende alleen te spreken over verzamelingen als bestaande uit alle dingen met een bepaalde eigenschap.

Maar afgezien van het feit, dat logisch gezien de verzamelingen, die ontstaan „door opsomming van de elementen" een bijzonder geval zijn van de verzamelingen, die „bestaan uit alle dingen met een bepaalde eigenschap", is er een klemmender argument om niet te spreken over twee manieren voor het vormen van een verzameling. Wie haalt het in zijn hoofd een verzameling te vormen door bij elkaar te voegen het getal 3, de directeur van Artis en de

piramide van Cheops? Dergelijke enormiteiten komen in de wetenschap niet voor. Men bepaalt een verzameling steeds door een eigenschap te geven, waaraan de elementen voldoen. Het ligt voor de hand de leerlingen te leren, dat verzamelingen op deze wijze gevormd worden. Daarna kan men voorbeelden geven van eindige verzamelingen, zoals de koningen van Nederland in de 19e eeuw, en vervolgens deze schrijven met behulp van opsomming van de elementen tussen accolades. Is men daarin eenmaal getraind, dan is er geen bezwaar meer te spreken over b.v. de verzameling $\{5, 12, 23\}$; men weet dan dat het mogelijk zal zijn door een of andere eigenschap deze verzameling te bepalen. En mochten er uit de klas vragen komen in deze richting, hetgeen me zou verwonderen, dan kan men vermelden, dat als eigenschap gekozen zou kunnen worden:

$$x = 5 \vee x = 12 \vee x = 23.$$

Tot zover wat vereist is bij eerste kennismaking met het begrip verzameling. Voor de leerlingen mag dit voldoende zijn, voor de leraar niet. In het voorgaande zitten voetangels en klemmen, waar de iets meer gevorderde leerling ook oog voor kan krijgen. „Dingen" en „eigenschap" zijn dermate vaag, dat we ons niet kunnen verbeelden op wetenschappelijk verantwoorde manier te hebben verteld, wat een verzameling is. Toch wil ik daar ditmaal niet nader op ingaan. Het geven van vage formuleringen kan onaangename consequenties hebben. Ook hier is dit het geval. Ik wil daarom nu ingaan op de perikelen, die door deze vage omschrijving van „verzameling" in het leven geroepen worden.

Het is algemeen bekend, dat in de verzamelingenleer paradoxen aan het licht gekomen zijn. B.v. de paradox van Russell betreffende de verzameling V van alle verzamelingen, die zichzelf niet als element bevatten. Als $V \in V$, dan zal V krachtens zijn definitie geen element van zichzelf zijn en dit kan dus niet. En als $V \notin V$, dan zal V krachtens zijn definitie wel element van zichzelf zijn en dit kan ook niet. Of, met minder woorden en meer symbolen uiteengezet:

$$x \in V =_{\text{def}} \neg\, x \in x \qquad \text{(te lezen: } \neg\, (x \in x)\text{).}$$

Uit deze definitie volgt:

$$V \in V \Leftrightarrow \neg\, V \in V.$$

Dus

a. $V \in V \Rightarrow \neg\, V \in V$, waaruit volgt $\neg\, V \in V$, (1)
b. $\neg\, V \in V \Rightarrow V \in V$, waaruit volgt $V \in V$. (2)

De in (1) en (2) afgeleide resultaten zijn contradictoor.

Iemand, die de wiskunde tot in zijn grondslagen wenst te vervolgen, zal bovenstaande paradox au sérieux moeten nemen. Ik kan mij echter levendig voorstellen, dat op velen deze redenering weinig indruk maakt. Misschien vindt men het wel waanzin, dat een verzameling element van zichzelf zou zijn. Laten we hier niet over twisten, maar liever een andere paradox ontwikkelen, die minder bekend is, maar er veel ernstiger uitziet.

De gebruikelijke manier om cardinaalgetallen te definiëren is als volgt. Twee verzamelingen met de eigenschap, dat er een bijectie bestaat van de een naar de ander (d.w.z. dat de een door een eeneenduidige afbeelding kan worden afgebeeld op de ander), heten gelijkmachtig. De relatie „gelijkmachtig" is een ekwivalentierelatie. We kunnen dus de verzamelingen verdelen in klassen onderling gelijkmachtige verzamelingen. Deze klassen heten cardinaalgetallen. Dus:

$$1 = \{x| \text{ er is een } y, \text{ waarvoor geldt } y \in x \text{ en voor alle } u \text{ en } v \text{ geldt: } (u \in x \quad \text{en} \quad v \in x) \Rightarrow u = v\}.$$

Enzovoorts. Het woord „klasse" is natuurlijk heel aardig gekozen, maar gezien onze in de aanhef geaccepteerde instelling is een klasse niets anders dan een verzameling. Dus: het cardinaalgetal 1 is de verzameling van alle verzamelingen, die één element hebben (en hierin zit geen vicieuze cirkel, want het hebben van één element houdt in het hebben van een element plus het hebben van de eigenschap, dat uit $u \in x$ en $v \in x$ volgt $u = v$).

Laten we nu eens gaan jongleren met de verzameling 1. Onderstel, dat a een deelverzameling van 1 is. Dan bevat de verzameling $\{a\}$ één element en is $\{a\}$ dus element van 1.

Er is dus een injectie (eeneenduidige afbeelding) van $\mathscr{P}1$ (d.i. de verzameling van alle deelverzamelingen van 1) naar 1. En dus is

$$\# \mathscr{P}1 \leqq \# 1 \qquad (1)$$

($\# V$ stelt het cardinaalgetal van V voor).

Anderzijds zegt een bekende stelling, dat voor elke V geldt: het cardinaalgetal van $\mathscr{P}V$ is groter dan dat van V. En dus geldt

$$\# \mathscr{P}1 > \# 1. \qquad (2)$$

De beide resultaten (1) en (2) zijn in strijd met elkaar. Aan de ernst van dit resultaat zal niemand zich willen onttrekken. Dit is geen paradox, die mogelijk zijn oorsprong heeft in een hersenkronkel, maar integendeel een resultaat, dat bijna binnen ons toekomstig wiskunde-onderwijs valt. Hier moet men zich toch wel afvragen:

wat is er misgegaan? Natuurlijk hebben ook degenen, die de grondslagen van de wiskunde kritisch onderzochten, getracht aan deze en dergelijke paradoxen het hoofd te bieden. Een van de wegen, die men daartoe bewandeld heeft, is nauwkeuriger nagaan, wat een verzameling is en preciezere regels opstellen voor het vormen van verzamelingen. Men is er daarbij toe overgegaan een axiomatische fundering te geven voor het begrip „verzameling". Het ligt niet in mijn bedoeling hierop in te gaan. Liever wil ik nagaan, hoe men zich op natuurlijke wijze beperkingen kan opleggen bij het vormen van verzamelingen en daardoor het optreden van bovengenoemde paradoxen kan voorkomen.

Allereerst zou ik dan willen opmerken, dat het nimmer voorkomt, dat een verzameling gevormd wordt door alle dingen überhaupt, die een bepaalde eigenschap hebben, tot een geheel te verenigen. Als u vraagt: wie heeft zijn les niet geleerd, dan verwacht u niet als antwoord: „de koning van Engeland" en evenmin „de prullemand". In uw vraag ligt reeds een beperking opgesloten. U bedoelt: wie van de leerlingen uit deze klasse, die op het ogenblik hier aanwezig zijn, heeft zijn les niet geleerd. U is dus reeds uitgegaan van een verzameling, de verzameling van alle aanwezige leerlingen van de klasse, en vraagt nu naar de elementen van deze verzameling, die een bepaalde eigenschap hebben, namelijk de eigenschap hun les niet geleerd te hebben. U vraagt dus een deelverzameling te vormen van een reeds impliciet bedoelde verzameling.

In het vorige voorbeeld werd de verzameling, waarvan een deelverzameling gevormd moest worden, niet expliciet vermeld. Vaak is dit wel het geval. Als voorbeeld nemen we de vraag: welke automerken worden in Frankrijk gefabriceerd? Misschien wil iemand deze vraag aldus lezen: welke dingen überhaupt hebben de eigenschap automerk te zijn en in Frankrijk gefabriceerd te worden? De voorstanders van deze interpretatie van de vraag zullen als antwoord b.v. geven: de hond van mijn buurman niet want het is geen automerk, de rector van het Vossius gymnasium ook niet want het is geen automerk, de mazelen niet want het is geen automerk, Opel niet want dit merk wordt niet in Frankrijk gefabriceerd, Renault wel, Beaujolais weer niet want het wordt wel in Frankrijk gefabriceerd maar is gelukkig geen automerk, enz. Men kan ook de vraag anders interpreteren. Men kan aannemen, dat met de vraagstelling bedoeld is, dat men zich bij verificatie zal beperken tot automerken, deze de revue zal laten passeren en zal nagaan welke van hen in Frankrijk gefabriceerd worden. In dat geval gaat men dus uit van een reeds voorhanden verzameling, de verzameling

van de automerken, en vormt van deze verzameling een deelverzameling.

Zo gaat het in de praktijk altijd. Steeds gaat men uit van een reeds voorhanden verzameling, van een reeds afgebakend geheel, en vraagt welk deel daarvan een bepaalde eigenschap heeft. Steeds vraagt men dus deelverzamelingen te vormen van reeds voorhanden verzamelingen en nooit vraagt men verzamelingen zo maar uit het niets te scheppen.

Hoe is het nu in de wiskunde? Men vraagt een vergelijking op te lossen. D.w.z. men vraagt b.v. de verzameling te vormen van alle x'en, die voldoen aan $3x + 5 = 7$. Anders genoteerd: $\{x|3x + 5 = 7\}$. Ieder weet nu wel, dat hier gevraagd wordt een verzameling getallen te vinden. Maar men hoort tegenwoordig, dat de vraagstelling onvolledig is. Er moet expliciet vermeld worden, wat voor soort getallen men wenst te vinden, d.w.z. in welk getallensysteem men de vergelijking wenst op te lossen. Is dit het systeem van de natuurlijke getallen, dan blijkt de vergelijking vals te zijn; is het daarentegen het systeem van de rationale getallen, dan is de enige wortel het getal $\frac{2}{3}$. We kunnen deze resultaten als volgt kort noteren:

$$\{x \in N|3x + 5 = 7\} = \emptyset,$$
$$\{x \in Q|3x + 5 = 7\} = \{\tfrac{2}{3}\}.$$

Hier is gebruik gemaakt van de volgende eenvoudige notatiemethode. Als we bij het construeren van een verzameling uitgaan van de verzameling V en vragen naar alle elementen x van V, die een bepaalde eigenschap $E(x)$ hebben, dan noteren we de zo verkregen deelverzameling van V

$$\{x \in V|E(x)\}.$$

Laten we ook nog eens een voorbeeld uit de meetkunde kiezen. Gevraagd wordt te onderzoeken de verzameling

$$\{X|\mathrm{d}(X, P) = \mathrm{d}(X, Q)\},$$

dus de verzamelingen van de X'en, die gelijke afstand tot de punten P en Q hebben. Ieder begrijpt, dat met deze X'en punten bedoeld zijn. Door het gebruiken van een bepaald lettertype heeft men duidelijk willen maken, dat niet naar lijnen of vlakken, maar naar punten gevraagd wordt. En ieder was al duidelijk, dat niet gevraagd werd naar getallen, artsen en wat dies meer zij. Toch is er nog een gebrek in de vraagstelling. Vragen we naar de punten in een plat vlak, die aan de gestelde eis voldoen, of naar de punten in een R_3 of misschien wel in een R_4? Beter is dus uit te gaan van b.v. een

plat vlak Π en te vragen naar de verzameling van de punten in dat vlak, die gelijke afstand tot P en Q hebben. We noteren de verzameling dan

$$\{x \in \Pi | \mathrm{d}(X, P) = \mathrm{d}(X, Q)\}.$$

Conclusie. Bij het definiëren van een verzameling gaan we uit van een reeds gedefinieerde verzameling V en vormen daar een deelverzameling van. De verzameling bestaat dan uit alle elementen x van V, die een bepaalde eigenschap $E(x)$ hebben.

Op de nadere omschrijving van hetgeen bedoeld wordt met „een eigenschap $E(x)$" ga ik hier niet in. In een volgende bijdrage hoop ik dit verzuim goed te maken. Wel wil ik me nog afvragen, of alle verzamelingen werkelijk op een dergelijke manier gevormd worden of dat er nog andere constructiemethoden gebruikt worden.

Ik zou daarbij willen wijzen op twee constructiemethoden, die uitgaande van reeds gedefinieerde verzamelingen meer omvangrijke verzamelingen doen ontstaan en dus niet onder bovengenoemde methode vallen. Dit zijn:

1e. het vormen van de vereniging $V \cup W$ van twee verzamelingen V en W,

2e. het vormen van de verzameling $\mathscr{P}V$ van alle deelverzamelingen van een verzameling V.

Aan deze drie methoden

het vormen van deelverzamelingen van V,

het vormen van $V \cup W$,

het vormen van $\mathscr{P}V$

hebben we in onze schoolwiskunde voldoende. Om dit toe te lichten, laten we nog enkele gangbare methoden om verzamelingen te construeren de revue passeren.

De lege verzameling:

$$\{x \in V | x \neq x\} = \emptyset.$$

De verzameling $\{a\}$. Laten we aannemen, dat a element is van een of andere verzameling V. (Als u ooit „iets" tegengekomen is, dat van geen enkele verzameling element is, in of buiten de wiskunde, hoor ik het graag.) Nu is

$$\{x \in V | x = a\} = \{a\}.$$

De verzameling $\{a, b\}$:

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

De doorsnede $V \cap W$:

$$\{x \in V | x \in W\} = V \cap W.$$

Het complement van V. Dat is een monster. Geen monster is het volgende. Laat W gedefinieerd zijn als deel van V. Dan is het complement van W t.o.v. V:

$$\{x \in V | x \notin W\}.$$

Maar het complement van een verzameling zonder meer heeft geen betekenis. Het is met onze drie constructievoorschriften ook niet te vormen.

Het verschil $V \backslash W$:

$$\{x \in V | x \notin W\} = V \backslash W.$$

Ik begrijp, dat er één vraag overblijft. Als een haan een dier is, waarvan de vader een haan is, enz., wat was er dan eerder: de kip of het ei? Met deze vraag heeft men op ander niveau reeds geworsteld vanaf het moment, dat men inzicht kreeg in het wezen van een deductieve wetenschap. Elke stelling wordt bewezen door haar te deduceren uit reeds bewezen stellingen, elk begrip wordt gedefinieerd door het af te leiden uit reeds gedefinieerde begrippen. En steeds bleek, dat men ergens beginnen moest om van daar uit verder te kunnen gaan. Zo is het ook hier. Men heeft vroeger dan ook wel eens absolute existentieaxioma's aan de verzamelingenleer ten grondslag gelegd en b.v. gepostuleerd, dat er een verzameling bestaat, die men de verzameling van de natuurlijke getallen zou kunnen noemen (omdat hij dezelfde structuur had). De modernere inzichten in de wiskunde hebben dit overbodig gemaakt. Tegenwoordig spelen de structuren een centrale rol in de wiskunde. Aan een voorbeeld lichten we de consequenties daarvan toe.

Voorbeeld. Als V een verzameling is, a een element van V en f een bijectie van V naar $V \backslash \{a\}$, en als geldt

voor elke $W \subset V$: $(a \in W$ en $\forall x \in V: x \in W \Rightarrow f(x) \in W) \Rightarrow W = V$ (inductiewet),

dan heet V een verzameling natuurlijke getallen (a het beginelement van V en f de opvolgingsfunctie).

Essentieel is nu, dat als we ooit een verzameling (met een a en een f) tegenkomen met de hierboven genoemde kwaliteiten, deze verzameling ook alle eruit af te leiden eigenschappen heeft. Of dergelijke verzamelingen existeren, doet er weinig toe; men heeft niet meer de behoefte de existentie van een dergelijke verzameling vast te leggen.

Daarmee hangt samen, dat postulaten over existentie van bepaalde verzamelingen overbodig zijn geworden en dat men kan

volstaan met regels op te stellen om uit eventueel existerende verzamelingen andere af te leiden. Daardoor kan men volstaan met de bovengenoemde drie constructieregels voor verzamelingen.

In het bovenstaande is getracht langs intuïtieve weg na te gaan, hoe verzamelingen gevormd worden. Het is tenslotte de moeite waard het verkregen resultaat te vergelijken met een axiomatische invoering van de verzamelingenleer, zoals die b.v. door Fraenkel gegeven is. Men vindt daar de volgende axioma's:

als V en W verzamelingen zijn, dan bestaat ook de verzameling $\{V, W\}$,

als V een verzameling is, dan bestaat de verzameling σV, die de vereniging is van alle elementen van V,

als V een verzameling is, dan bestaat de verzameling $\mathscr{P}V$,

als V een verzameling is en $E(x)$ een eigenschap, dan bestaat de verzameling $\{x \in V | E(x)\}$, waarbij een nauwkeurige bepaling gegeven wordt van wat onder $E(x)$ verstaan dient te worden.

Deze wetenschappelijke formulering is wat scherper, maar komt vrijwel op hetzelfde neer. De enige verruiming bestaat uit de mogelijkheid ook van een niet eindige hoeveelheid verzamelingen de vereniging te vormen.

Welke beperkingen vloeien nu uit het voorgaande voort? Men kan niet meer zonder meer spreken van de verzameling van alle .... Men kan dit alleen nog maar, als van te voren een verzameling afgepaald is, waarvan men een deel wil vormen. Men kan dus niet meer spreken van de verzameling van alle verzamelingen.

Helaas kan men deze dan ook niet gebruiken om als uitgangspunt te dienen voor het vormen van deelverzamelingen. En dit brengt met zich mee, dat men niet meer zal kunnen spreken van de verzameling van alle verzamelingen, die precies één element bevatten.

De consequentie daarvan is, dat men niet meer het cardinaalgetal 1 kan definiëren als de verzameling van alle verzamelingen, die precies één element hebben. En dat men dus niet meer de cardinaalgetallen als verzamelingen kan definiëren.

Hoe kan men nu nog wel de cardinaalgetallen invoeren? Een mogelijkheid is, dat men geen cardinaalgetallen meer definieert, maar dat men volstaat met aan de uitdrukking: „V en W hebben hetzelfde cardinaalgetal", betekenis te geven. Sommigen volgen deze methode.

Een andere mogelijkheid is, dat men dergelijke vormsels als „alle verzamelingen, die precies één element bevatten" geen verzamelingen meer noemt, maar ze een andere naam geeft. Men noemt ze klassen. Deze weg is inderdaad door grondleggers van de ver-

zamelingenleer ingeslagen. Door onderscheid te maken tussen klassen en verzamelingen en aan te nemen, dat verzamelingen elementen hebben en ook op hun beurt element van verzamelingen kunnen zijn, terwijl klassen wel elementen hebben maar geen element van verzamelingen kunnen zijn, is men erin geslaagd een sluitend geheel te fabriceren, waarbij kool en geit gespaard worden. De kool bestaat uit het wel kunnen praten over de klasse van alle verzamelingen met precies één element, e.d., de geit uit het omzeilen van de paradoxen. En het merkwaardige is, dat onze term „klasseïndeling" juist in overeenstemming is met deze funderingsmethode. Ik wil hier wel als persoonlijk gevoelen aan toevoegen, dat een dergelijke fundering van de verzamelingenleer mij een zeer onbehaaglijk gevoel geeft en op mij de indruk wekt van het willen maken van een sluitend geheel door het natuurlijke denken min of meer geweld aan te doen. Wiskundig gezien heeft deze opmerking echter geen enkele zin. Belangrijker is, dat men geen verzamelingen van cardinaalgetallen meer zou mogen vormen.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op donderdag 28 december 1967 in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht, Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering 1966*.
3. Jaarverslagen
3.1. van de secretaris*,
3.2. van de penningmeester,
3.3. van de kascommissie*,
3.4. van de redactie van „Euclides"*,
3.5. van de commissie voor de leesportefeuille*.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing.
6. Vaststelling van de contributie voor 1968/1969.
7. Voordracht van Prof. dr. J. J. Seidel over „*Discrete Meetkunde*".

Pauze

8. Voordracht van een nader bekend te maken spreker.
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

* Publikatie hiervan zal geschieden in het decembernummer van „Euclides".

N.B. Deze mededeling geldt als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Zij kunnen tot uiterlijk 15 november a.s. agendapunten voorstellen bij de secretaris, Bosboomstraat 20, Arnhem.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

Martin Gardner heeft voor de derde keer de wiskundige puzzelwereld verblijd met een boek, waarin hij allerlei wetenswaardigs uit zijn artikelen in Scientific American heeft samengevat (Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American). Hieronder volgt een tweetal opgaven, die aan deze bundel ontleend zijn.

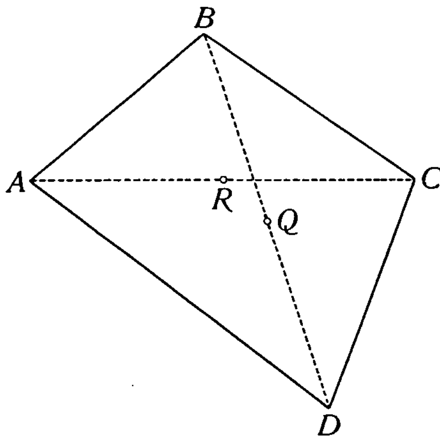
185. Een grote kubus is samengesteld uit 27 congruente kubussen. Een houtworm begint buiten, boort een gat door het midden van een wand van een van deze kubussen, vreet een gang door deze kubus, gaat door het midden van een andere zijwand naar een naastgelegen kubus, enz. Hij doorvreet zo achtereenvolgens alle kubussen en komt ten slotte terecht in de middelste kubus. Door geen enkele kubus mag hij tweemaal een gang boren. Bij welke kubus kan hij begonnen zijn?

186. A schrijft op een groot aantal papiertjes elk één positief reëel getal; alle opgeschreven getallen zijn verschillend. Hij legt alle papiertjes zo op tafel, dat het getal onzichtbaar is. B krijgt nu de opdracht de papiertjes stuk voor stuk in willekeurige volgorde om te keren. Hij leest de getallen en moet stoppen bij het getal, waarvan hij vermoedt, dat het het grootste van allemaal is. Welke strategie moet B volgen om een optimale kans te hebben bij het grootste getal te stoppen en hoe groot is zijn kans op slagen, als het aantal papiertjes zeer groot is?

De opgave is enigszins duizelingwekkend op het eerste gezicht. Probeer daarom eerst eens met kleine aantallen. Als het aantal 2 is, zijn er maar twee strategieën mogelijk: stop bij het eerste en stop bij het tweede getal. In beide gevallen is de kans op succes 0,5. Welke strategie zullen we volgen, als het aantal papiertjes 3 is? Welke als dit aantal 4 is? En nu algemeen.

OPLOSSINGEN

183. Gevraagd werd welke convexe vierhoeken $ABCD$ in hun binnengebied een punt P bevatten, waarvoor geldt, dat de driehoeken PAB, PBC, PCD en PDA gelijke oppervlakte hebben.



Trek BD; het midden van BD noemen we Q. Als de driehoeken PAB en PAD gelijke oppervlakte hebben en P binnen de vierhoek ligt, dan ligt P op de lijn AQ. Analoog moet P liggen op de lijn CQ.

Het midden van AC noemen we R. P moet nu ook liggen op de lijnen BR en DR. Hieruit volgt: een van de diagonalen deelt de ander middendoor.

Omgekeerd: als een van de diagonalen van een vierhoek de ander middendoor deelt, dan is er een punt P te vinden, dat aan de vraag voldoet.

184. Vind de kleinste drie opvolgende natuurlijke getallen, waarvan de som van de kwadraten weer een kwadraat is.

Dit is niet mogelijk. De drie getallen zijn gelijk aan 0, 1 en 2 (mod 3). Hun kwadraten zijn dan gelijk aan 0, 1 en 1 (mod 3) en de som daarvan aan 2 (mod 3). Er is geen natuurlijk getal, waarvan het kwadraat gelijk is aan 2 (mod 3).
Met enig puzzelen kan men ook vinden, dat het niet lukt om 4, 5, 6 of 7 opvolgende natuurlijke getallen te vinden, waarvan de som van de kwadraten weer een kwadraat is. Lukt het ook niet voor een willekeurig ander aantal? Voor inlichtingen houd ik mij aanbevolen; ik heb dit niet kunnen vinden.

BOEKBESPREKING

John A. Peterson and Joseph Hashisaki, *Theory of Arithmetic*, second edition, 337 blz., ingeb. 60/ -, John Wiley and Sons, New York - London.

Van dit zeer verzorgde leerboek, waarvan de eerste druk gerecenseerd werd op p. 221—222 van de 39e jaargang van Euclides, is thans een nieuwe bewerking verschenen die ook de aandacht verdient van de Nederlandse wiskundeleraren, in het bijzonder van hen die bij de opleiding van onderwijzers en leraren zijn betrokken. In de nieuwe tekst van dit op veeljarige experimenten opgebouwde leerboek kon rekening gehouden worden met de ervaringen van een brede kring van gebruikers en van opbouwende kritiek van de zijde van de Mathematical Association of America en van de National Council of Teachers of Mathematics.

In een lezenswaardige paragraaf over de „chronology of π" miste ik de benadering 355/113 voor π van de Nederlander Metius en werd de Nederlander Ludolph van Ceulen ten onrechte als Duitser gekwalificeerd.

Joh. H. Wansink

Dr. H. J. Schneider und Dipl. -Math. D. Jurksch, *Programmierung von Datenverarbeitungsanlagen*, Sammlung Göschen, Band 1225/1225a, Walter de Gruyter und Co, Berlin 1967, 111 blz., DM 5.80.

Dit is een beknopte beschrijving van Algol en Fortran. Het lijkt mij de vraag of een dergelijke beknopte behandeling voor de beginner geschikt is. Ik zou althans liever een wat uitgebreidere handleiding aanbevelen. Als geheugensteuntje voor iemand, die reeds Algol kent, kan het wel dienen, maar indien deze ervaren is zal hij de voorkeur geven aan het officiële Algolrapport.

A. I. van de Vooren

Mary L. Boas, *Mathematical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons Ltd., London, 1967, 778 blz., 90/-.

Men heeft hier een fors handboek, dat geschreven is met de bedoeling om studenten in de natuurwetenschappen te helpen zich de technieken en hun achtergronden eigen te maken van wiskunde-onderwerpen, die zij bij hun studie zullen tegenkomen.

Kan men in de eerste hoofdstukken: Rijen en reeksen, complexe getallen, determinanten en matrices, meervoudige integralen en de inleiding tot de vectoranalyse, volstaan met een voorkennis die overeenkomt met ons V.H.M.O.-B programma, de daaropvolgende hoofdstukken vereisen, en dat kan dan ook wel, wat meer kennis van de infinitesimaalrekening (fourierreeksen, differentiaal-vergelijkingen, variatierekening, elliptische integralen, gamma- en bètafuncties, tensoranalyse, laplacetransformaties, partiële differentiaalvergelijkingen).

De beste omschrijving is zeer kort uit de inleiding weer te geven. Instructor: ,,What do you say when students ask about the practical applications of some mathematical topic?"

Professor: ,,I tell them". En dit is nu juist waarin de schrijfster uitstekend geslaagd is. Het zeer groot aantal opgaven (het totale aantal loopt in de honderden, 17 blz. met antwoorden) heeft hoofdzakelijk betrekking op fysische problemen.

Een overdadige literatuurlijst, bijna 100 aanbevolen boeken, kan degenen die een meer exacte behandeling verlangen de weg wijzen.

Dat de uitvoering van dit boek voortreffelijk is, behoeft geen betoog.

Burgers

Dr. A. van Dop, Dr. Ir. B. Groeneveld en Dr. A. van Haselen, *Afbeeldingsmeetkunde*, Deel III, ing. f 4,90, J.B. Wolters, Groningen.

Overeenkomstig het voorbericht wordt begonnen met een scheefrooster en met scheve coördinaten; dan komen achtereenvolgens de vectoren, de vermenigvuldiging, de evenredigheden en de gelijkvormigheid. Vervolgens een — niet te lang — hoofdstuk over de verzamelingen met de daarin gebruikte symbolen. Dan eerst de goniometrie — voor Pythagoras! De cosinusregel is er wel, de sinusregel niet. Goniometrische tafels worden niet behandeld tot mijn spijt. Tenslotte worden de oppervlakten besproken.

In mijn bespreking van deel I heb ik mijn nieuwsgierigheid uitgesproken t.a.v. verzamelingen, vermenigvuldiging, evenredigheden en gelijkvormigheid. Na kennismaking met deze onderwerpen in deel II laat ik mijn reserves vallen; ik vind de behandeling uitstekend.

Er zijn vraagstukken, die niet moeilijk zijn. De meesten zijn berekeningen; zij geven precies wat de stereometrie nodig heeft, niet meer en niet minder. Alles in klassieke stijl, ondanks de moderne opvatting der theorie. Enkele bewijzen kwamen inderdaad met deze theoriebehandeling elegant te voorschijn.

Het boek is tot mijn vreugde weer kort (93 pagina's); uiteraard helder van betoog en typografisch gaaf verzorgd. Deel I had 86 pagina's en niet 186, zoals mijn bespreking in Euclides **42**-I-pag. 29 vermeldt. Wij hopen op een continuering van deze prijzenswaardige beknoptheid in deel III.

Groenman